

NIEBO  
KOPERNIKA

POKAZ MUZYCZNY

# CHAOS I HARMONIA

## MATEMATYCZNA SYMFONIA

PLANETARIUM

W CENTRUM NAUKI KOPERNIK

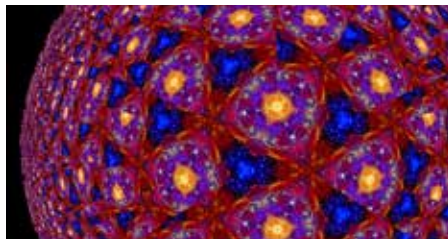
## CHAOS I HARMONIA

Zapraszamy do świata sztuki, tworzonego za pomocą algorytmów. Zobacz obrazy, które nie tylko zachwycają, ale także inspirują do zagłębienia się w tajniki matematyki. Chcesz je poznać? Oto krótki przewodnik. Film podzielony jest na cztery części, inspirowane różnymi działami matematyki.

## CZĘŚĆ PIERWSZA: FORMY

Zobaczysz niezwykle wizualizacje brył platońskich, fullerenów i obrazów z kalejdoskopów.

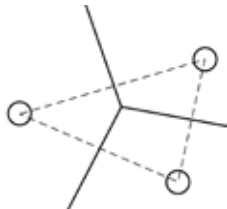
### Kalejdoskop



Każdy kto bawił się kiedyś kalejdoskopem pamięta fantastyczne, zmieniające się obrazy. Kalejdoskop to rurka, w której umieszczono 3 lub więcej zwierciadeł, tworzących graniastosłup. Jeśli w środku znajdują się jakieś przedmioty, zaglądając przez otwór zobaczymy oprócz nich także ich lustrzane odbicia, odbicia odbić, odbicia odbić odbić... itd. Ze względu na wykorzystywane w kalejdoskopie proste prawa optyki, podobne wizualizacje można też tworzyć z użyciem komputera.

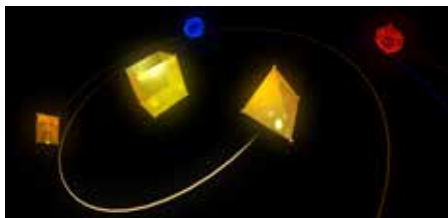
### Diagram Woronoja

Jak na pustyni znaleźć najbliższą studnię? Decyzję ułatwiłaby nam mapa z diagramem Woronoja. Jak ją stworzyć? Wybierzmy zbiór punktów (studni). Płaszczyznę pustyni podzielmy na komórki zawierające po jednym z tych punktów tak, żeby w wnętrza komórki było zawsze bliżej do tego punktu niż do dowolnego innego punktu z naszego zbioru. Teraz pozostaje nam tylko sprawdzić,



w której komórce się znajdujemy. Diagramy Woronoja można też tworzyć dla punktów w przestrzeni – poszczególne komórki są wówczas wielościanami wypukłymi.

### Bryły platońskie



Wielościany foremne składają się z identycznych wielokątów foremnych, ustawionych tak, że w każdym wierzchołku spotyka się taka sama liczba ścian. Jest ich zaledwie pięć, co po raz pierwszy dostrzegł Platon. Uważał on, że z takich wielościanów zbudowany jest każdy z czterech żywiołów: czworościan, ośmiościan i dwudziestościan zbudowane z trójkątów, tworzyłyby ogień, powietrze i wodę. Sześciściany byłyby atomami ziemi, a dwunastościan o ścianach z pięciokątów foremnych symbolizowałby cały Wszechświat, lub piąty pierwiastek – niebiański eter. Podobne bryły można też zbudować z kilku różnych wielokątów. Otrzymamy wtedy obiekty przypominające piłkę futbolową, niektóre fulereny lub pokazane w filmie sfery geodezyjne.



## CZĘŚĆ DRUGA: SYMULACJE

Obrazy nieba inspirowały artystów od zawsze. Dzięki symulacjom komputerowym zobaczysz zderzenia galaktyk, podobne do tego, które czeka w przyszłości Drogę Mleczną.

### Gromady galaktyk

Galaktyki nie są równomiernie rozłożone we Wszechświecie, lecz tworzą gromady. Z powodu wielkich odległości międzygalaktycznych, ruchy tych skupisk gwiazd nie są zauważalne w skali ludzkiego życia. Można je obejrzeć tylko dzięki symulacjom komputerowym.

### Dynamika płynów

Niezwykle efektowny „taniec” cieczy powstaje w wyniku wzajemnych przemian różnych rodzajów energii. Obliczenia dotyczące zachowania płynów muszą uwzględniać nie tylko siły bezwładności i grawitacji, ale też lepkość i napięcie powierzchniowe. To ostatnie zjawisko przeciwdziała rozszerzaniu się powierzchni zajmowanej przez płyn i powoduje, że krople cieczy przy braku innych sił dążą do przyjęcia kształtu kulistego.

### Zderzenia galaktyk

Oto zderzenie dwóch galaktyk w gwiazdozbiorze Kruka. Grawitacja każdej z nich wpływa na tor ruchu wszystkich pozostałych gwiazd i niektóre z nich mogą być wyrzucane poza galaktyki. Czy można przewidzieć która z gwiazd zostanie wyrzucona? Dwa oddziałujące grawitacyjnie ciała poruszają się w przestrzeni kosmicznej po całkowicie przewidywalnych torach, opisanych przez Keplera. Jednak francuski matematyk Henri Poincaré (1854 – 1912) wykazał, że jeśli ciał jest więcej niż dwa, nie da się dokładnie przewidzieć ich przyszłości. Nawet przy minimalnym błędzie w pomiarze początkowego położenia lub prędkości, zachowanie układu może okazać się całkowicie różne od przewidywań.

## CZĘŚĆ TRZECIA: ALGORYTMY

Algorytmy umożliwiające rozwiązanie skomplikowanych równań, pozwalają też na tworzenie oryginalnych obrazów. Zobacz je na własne oczy.

### Układ reakcji-dyfuzji (model Turinga)

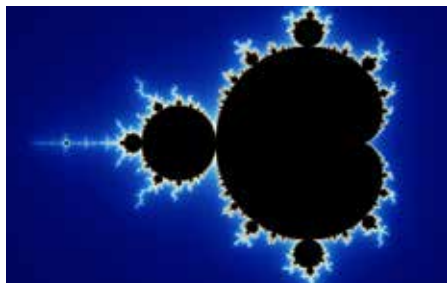
W tym układzie zmiana koncentracji pewnej substancji zależy od tego, ile się jej rozprzestrzeni w rozważanej objętości wskutek dyfuzji, a ile przekształci się w inną substancję w wyniku reakcji chemicznej. Mimo ustalonych warunków początkowych, w każdym kolejnym doświadczeniu możemy uzyskać różne, choć podobne kształty. Opisywane tym modelem procesy przebiegające w trakcie rozwoju zarodkowego odpowiadają m.in. za powstanie łatek na sierści dalmatyńczyka i tygrysiich pręgów.

## CZĘŚĆ CZWARTA: FRAKTALE

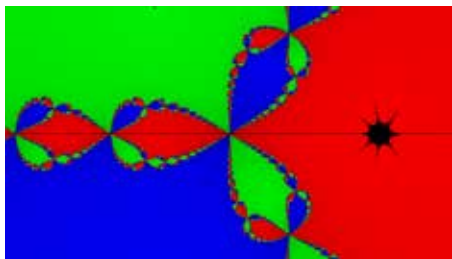
Od dawna urzekają nas swoją urodą. Kształty przypominające fraktale odnajdujemy nie tylko w sztuce, ale także w przyrodzie – oglądając liście paproci, mapy morskich wybrzeży, a nawet błyskawice.

### Zbiór Mandelbrota

Pojęcie fraktali wprowadził urodzony w Warszawie, lecz działający we Francji i USA matematyk Benoit Mandelbrot (1924 – 2010). Nurkując w głąb stworzonego dzięki jego pracom obrazu, przedstawiającego zbiór zwany żukiem Mandelbrota, napotykamy jego mniejsze, dziwnie przekształcone wersje. Taka podróż może trwać w nieskończoność.

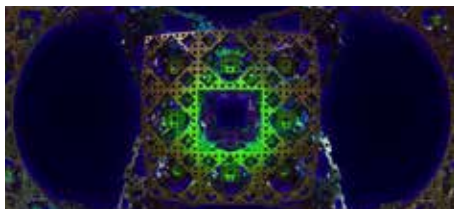


## Wstęga Newtona



Niektórych równań nie da się lub nie chcemy rozwiązać analitycznie, z podaniem dokładnego końcowego wzoru. Można wówczas wykorzystać metodę Newtona, która startując z dowolnego punktu prowadzi nas do następnego, bliższego rozwiązania. Spójrzmy na przykład użycia tej metody do rozwiązania równania  $z^3-1=0$ . Równanie to dla liczb zespolonych ma trzy różne rozwiązania. Startując z większości punktów płaszczyzny zespolonej powinniśmy dotrzeć do któregoś z nich. Wstęgę Newtona tworzą pozostałe punkty płaszczyzny. Przypomina ona kształtem łańcuch pętli. Powiększenie fragmentu obrazu ujawnia, że sam łańcuch również składa się z takich pętlopodobnych wzorów. Występujące desenie mogą przywołać na myśl żebra gotyckich sklepień.

## Gąbka Mengera



Opisany przez austriackiego matematyka Karla Mengera (1902 –1985) obiekt pokazuje problemem zdefiniowania wymiaru nietypowych przestrzeni matematycznych. Zwykle stosuje się do tego tzw. wymiar Hausdorffa. Gąbkę Mengera, której wymiar wynosi ułamekowe 2,73, konstruuje się przez nieskończenie wiele powtórzeń podobnego kroku: krawędzie sześcianu dzielimy na 3 równe

części, co daje podział na  $3^3=27$  mniejszych sześciątów. Usuwamy środkowy mniejszy sześciąt z każdej z sześciu ścian oraz jedną ze środka dużego sześciątka. Powstaje bryła złożona z  $N(3)=8\cdot 2+4=20$  mniejszych sześciątów. Jej pole powierzchni jest większe od pola dużego sześciątka, a objętość mniejsza. Wielokrotne powtórzenie opisanej procedury dla coraz mniejszych sześciątów stworzy w kawałku przestrzeni zajmowanej przez pierwotny sześcian fraktalną bryłę o bardzo dużej powierzchni i małej objętości.

## Co zobaczymy w filmie „Chaos i harmonia”?

### Część I – Formy

- Siatka sześcienne
- Statyczna tablica sześcianów
- Symetria: kalejdoskop
- Diagram Woronoja
- Bryły platońskie: sześciany
- Czworoscian foremny
- Ośmiościan foremny
- Dwudziestościan foremny
- Dwunastościan foremny
- Tablica dynamiczna sfer geodezyjnych
- Tablica dynamiczna sześcianów
- Splot boromejski z pięciu pierścieni
- Sfera geodezyjna
- Powierzchnia gyroidalna
- Powierzchnia spiralna
- Powierzchnia Clebscha

### Część II – Symulacje

- Symulacja cząstek w polu grawitacyjnym
- Struktury we Wszechświecie
- Dynamika bryły sztywnej
- Dynamika płynów
- Symulacja stada obiektów
- Tory lotu obiektów
- Ciecz lepkosprężysta
- Termodynamika
- Symulacja „Gravity – set”
- Symulacja „Light – gravity”
- Symulacja „Kolizja galaktyk”

### Część III – Algorytmy

- Model komórkowy reakcji Biełousowa-Zabotyńskiego
- Grafika ewolucyjna
- Agregacja ograniczona dyfuzją 3D
- Sprzężone automaty komórkowe
- Cykloida
- Agregacja ograniczona dyfuzją 2D
- Równania Rabinowicza-Fabrikanta
- Układ reakcji-dyfuzji: model Ginzburga-Landaua
- Układ reakcji-dyfuzji: model Turinga
- Atraktor Lorensa

### Część IV – Fraktale

- Zbiór Mandelbrota
- Fraktal – konstrukcja metodą sieciowych
- Fraktal – algorytm czasu ucieczki
- System funkcji iterowanych: rekurencyjne płomienie fraktalne
- Fraktal Mandelbulb
- Fraktal Mandelbox
- Wstęga Newtona
- Gąbka Mengera